Probabilidad y Estadística 5-dic-2018

Examen Final TEMA 1

Apellido y Nombres: .... Legajo: ....

La condición de aprobación es al menos el 50% de la práctica y al menos el 50% de la teórica

Ejerc. 1	Ejerc. 2	Ejerc. 3	Ejerc. 4	Teórico 1	Teórico 2	Nota

La condición mínima de aprobación es dos prácticos y un teórico correctos. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Ejercicio 1 Los cines norteamericanos saben que una película de éxito se exhibe en un promedio de 84 días en cada ciudad y con una desviación estándar de 10 días. El administrador del distrito Okla se interesó en comparar la popularidad de la película en su región con la que tuvo en otros distritos de Estados Unidos. Eligió 75 salas al azar en su región y encontró que exhibieron la película en un promedio de 81.5 días. Con un nivel de significación del 5% analizar si los días promedio de Okla son inferiores a los indicados por los cines americanos. Qué supuestos debe hacer para que sea válida la prueba?

Ejercicio 2 Una costura hecha en un avión necesita 25 remaches. La costura tendrá que volver a realizarse si al menos uno de los remaches está defectuoso. Suponiendo que los remaches están defectuosos independientemente, unos de otros, cada uno con la misma probabilidad.

a) Si el 14% de todas las costuras necesitan volver a efectuarse, ¿cuál es la probabilidad de que un remache esté defectuoso?

b) Si sólo el 10% de los remaches son defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de ~~que~~ no tener que volver a realizar la costura. ?

Ejercicio 3 El tiempo que a un técnico le lleva reparar un equipo está modelado mediante una variable X de la que se conoce la función de distribución:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & si \quad X < 0 \\ \frac{x}{2} & si \quad 0 \leq X < 1 \\ \frac{x+2}{6} & si \quad 1 \leq X < 4 \\ 1 & si \quad X \geq 4 \end{cases}$$

a) Hallar la variabilidad del tiempo de reparación

b) Si el costo de reparación es una variable $Y = 3 + 20X$, hallar el valor esperado del costo de reparación

Ejercicio 4 El tiempo que se tarda en resolver la primera pregunta de un examen de Probabilidades y Estadística , en minutos, sigue una distribución normal. Se ha medido el tiempo que han tardado 12 alumnos en resolver dicha pregunta, obteniendo los siguientes valores:

9.3 8.5 6.9 8.8 7.6 8.9 8 9 8.1 9.2 8.3 9.2

Obtener un intervalo de confianza para la varianza de dichos datos al 95% de confianza.

Teórico 1 Si $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ es una muestra aleatoria simple de una población normal con media 3 y varianza 4.

a) Cómo se distribuyen:

- $X_1 + 2X_2$
- $S_{10} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$

b) Halle $P(|\bar{X} - 3| > 1)$

Teórico 2 Explicar y ejemplificar los términos: a) independencia de eventos b) nivel de confianza c) p valor.

PyE - UTN 5-12-18

① Los cines norteamericanos saben que una película de éxito se exhibe en un promedio de 84 días en cada ciudad y con una desviación estándar de 10 días. El administrador del distrito Okla se interesó en comparar la popularidad de la película en su región con la que tuvo en otros distritos de Estados Unidos. Eligió 75 salas al azar en su región y encontró que exhibieron la película en un promedio de 81,5 días. Con un nivel de significación del 5% analizar si los días promedios de Okla son inferiores a los indicados por los cines norteamericanos. ¿Qué supuestos debe hacer para que sea válida la prueba?

$\bar{X} = 81{,}5$

$m = 75$

$\sigma = 10$

$\alpha = 0{,}05$

$$H_0: \mu = 84 \quad vs \quad H_1: \mu < 84$$

$$e_m = \frac{\bar{X} - 84}{\frac{10}{\sqrt{75}}} \sim N(0,1) \text{ bajo } H_0$$

Rechazo Ho si $Z_{obs} < z_{0,05}$

$$Z_{obs} = \frac{(81{,}5 - 84)\sqrt{75}}{10} = -2{,}1651$$

$$z_{0,05} = -1{,}644$$

$\Big\rangle$ $Z_{obs} < z_{0,05} \rightarrow$ Rechazo Ho

$\boxed{\text{Los días promedios de Okla son inferiores a los del resto de Norteamérica}}$

Supongo población normal.

Sylvina

(2) Una costura hecha en un avión necesita 25 remaches. La costura tendrá que volver a realizarse si al menos uno de los remaches está defectuoso. Suponiendo que los remaches están defectuosos independientemente unos de otros cada uno con la misma probabilidad.

a) Si el 14% de todas las costuras necesitan volver a efectuarse ¿cuál es la prob. de que un remache esté defectuoso?

X: "cantidad de remaches defectuosos de un total de 25"

$X \sim Bi\ (25, p)$

$P(X \geq 1) = 0{,}14 = 1 - P(X < 1) \underset{\text{discreta}}{=} 1 - P(X \leq 0) = 1 - P(X=0)$

$P(X=0) = 0{,}86 = \binom{25}{0} (p)^0 (1-p)^{25} \rightarrow (1-p)^{25} = 0{,}86 \rightarrow 1-p = \sqrt[25]{0{,}86}$

$p = 1 - \sqrt[25]{0{,}86} = 0{,}006$

$\boxed{X \sim Bi\ (25, 0{,}006)}$

$\boxed{p = 0{,}006}$

b) Si solo el 10% de los remaches es defectuoso, ¿cuál es la prob. de no tener que volver a realizar la costura?

$p = 0.10 \rightarrow X \sim Bi\ (25, 0.1)$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) \underset{\text{discreta}}{=} 1 - P(X \leq 0) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{25}{0} 0.10^0\ 0.9^{25}$

$\boxed{P(X \geq 1) = 0{,}072}$

NOTA

HOJA N°

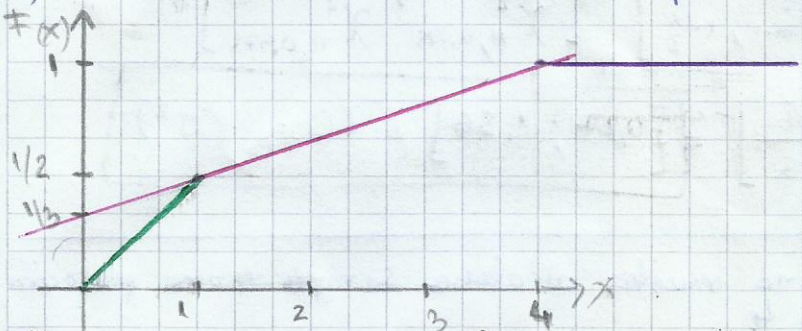
FECHA 5-12-18

③ El tiempo que a un técnico le lleva reparar un equipo está modelado mediante una v.a. X de la que se conoce la función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } X<0 \\ \frac{x}{2} & \text{si } 0\leq X<1 \\ \frac{x+2}{6} & \text{si } 1\leq x<4 \\ 1 & \text{si } X\geq 4 \end{cases}$$

$\left\{ \frac{x}{6}+\frac{1}{3} \right.$

a) Hallar la variabilidad del tiempo de reparación



$x\in[0,1): f(x)=F'(x)=\frac{1}{2}$

$x\in[1,4): f(x)=\left(F(x)-\frac{1}{2}\right)'$

$\hookrightarrow f(x)=\frac{1}{6}$

Si F es una recta → f es una constante

En x = 1 ya había acumulado 1/2 y en x = 4 tiene acumulado todo así que en $x\in[1,4) \rightarrow f(x)=\left(\frac{x+2}{6}-\frac{1}{2}\right)'=\left(\frac{x-1}{6}\right)'=\frac{1}{6}$

$$f(x)=\begin{cases} 1/2 & \text{si } 0\leq x<1 \\ 1/6 & \text{si } 1\leq x<4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$\boxed{V(X)=E(X^2)-E(X)^2}$

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x}{2}\,dx+\int_1^4\frac{x}{6}\,dx=\frac{3}{2} \rightarrow \boxed{E(X)^2=\frac{9}{4}}$

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx+\int_1^4\frac{x^2}{6}\,dx=\boxed{\frac{11}{3}=E(X^2)}$

$V(X)=\frac{11}{3}-\frac{9}{4}=\frac{17}{12} \rightarrow \boxed{V(X)=\frac{17}{12}}$

b) Si el costo de reparación es una variable $Y=3+20X$, hallar el valor esperado del costo de reparación

$E(Y)=E(3+20X)=E(3)+E(20X)=3+20\,E(X)=3+20\times\frac{9}{4}$

$\boxed{E(Y)=48}$

Syl

NOTA

④ El tiempo que se tarda en resolver la primera pregunta de un examen de P y E en minutos sigue una distribución normal.
Se ha medido el tiempo que han tardado 12 alumnos en resolver dicha pregunta, obteniendo los sig. valores:

9,3   8,5   6,9   8,8   7,6   8,9   8   9   8,1   9,2   8,3   9,2

Obtener un intervalo de confianza para la varianza σ^2 de dichos datos al 95% de confianza.

$s = 0{,}7346$ $n = 12$ $\chi^2_{11,\,0.025} = 21{,}920$ $\chi^2_{11,\,0{,}975} =$

$$IC_{0{,}95}(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}},\ \frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{n-1,\,1-\frac{\alpha}{2}}}\right] = \left[\frac{11\cdot 0{,}7346^2}{\chi^2_{11,\,0{,}025}},\ \frac{11\ 0{,}7346^2}{\chi^2_{11,\,0{,}975}}\right] =$$

$$= \left[\frac{5{,}936}{21{,}92},\ \frac{5{,}936}{3{,}816}\right] = \boxed{[0{,}27\ ;\ 1{,}56] = IC_{0{,}95}(\sigma^2)}$$

Teórico 1) Si $X_1, X_2 \ldots X_{10}$ es una muestra aleatoria simple de una población normal con media 3 y varianza 4.

$X_i \sim N(3,2)$ $i \in [1,10]$

a) Cómo se distribuyen:

• $X_1 + 2X_2$

$$\left.\begin{array}{l} E(X_i) = 3 \\ V(X_i) = 4 \end{array}\right\}\ E(X_1+2X_2) = E(X_1) + 2E(X_2) = 3 + 2\cdot 3 = \boxed{9 = E(X_1+2X_2)}$$

$$V(X_1+2X_2) = V(X_1) + 4\,V(X_2) = 4 + 4\cdot 4 = \boxed{20 = V(X_1+2X_2)}$$

$$\boxed{(X_1+2X_2) \sim N(9,\ \sqrt{20})}$$

• $S_{10} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10}$

$$E(S_{10}) = E\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) = \sum_{i=1}^{10} E(X_i) = 10\cdot \overbrace{E(X_i)}^{3} = \boxed{30 = E(S_{10})}$$

$$V(S_{10}) = V\left(\sum_{i=1}^{10} X_i\right) = \sum_{i=1}^{10} V(X_i) = 10\cdot 4 = \boxed{40 = V(S_{10})}$$

$\boxed{\sqrt{40} = 2\sqrt{10}}$

$$\boxed{S_{10} \sim N(30,\ \sqrt{40})}$$

$\bar{X} = \frac{S_{10}}{10}$

b) Halle $P(|\bar{X} - 3| > 1)$

$\boxed{\bar{X} \sim N\left(3;\ \frac{\sqrt{10}}{5}\right)}$

$$P(|\bar{X}-3|>1) = P(\bar{X}-3 > 1 \cup 3-\bar{X} > 1) = P(\bar{X}>4 \cup \bar{X}<2) \underset{\text{disjuntos}}{=}$$

$$= P(\bar{X}>4) + P(\bar{X}<2) \overset{\text{cont.}}{=} 1 - P(\bar{X}\leq 4) + P(\bar{X}\leq 2) =$$

$$= 1 - P\left(\frac{\bar{X}-3}{\sqrt{10}/5} \leq \frac{4-3}{\sqrt{10}/5}\right) + P\left(\frac{\bar{X}-3}{\sqrt{10}/5} \leq \frac{2-3}{\sqrt{10}/5}\right) =$$

$$\overset{N}{=} 1 - P(Z \leq 1{,}5811) + P(Z \leq -1{,}5811) =$$

HOJA Nº: PyE

FECHA: 5-12-18

$$= 1 - 0{,}94307 + 0{,}056928 = 0{,}113858$$

$$\boxed{P(|\bar{X} - 3| > 1) = 0{,}1139}$$

Teórico 2: Explicar y ejemplificar los términos:

a) independencia de eventos.

Dos sucesos aleatorios son independientes cuando la ocurrencia de uno de esos eventos no afecta la del otro. En otras palabras sería cuando no están relacionados

Experimento: se tira un dado normal dos veces.

A: La primera vez salió un 2
B: La segunda vez salió un 3

b) Nivel de confianza

Representa el porcentaje de intervalos que incluirán al parámetro buscado en el caso de realizar muchas muestras aleatorias.

O sea que si realizamos 100 muestras y hallamos 100 intervalos de confianza de un parámetro, cabe esperar que $1-\alpha$ de los intervalos contengan el verdadero valor del parámetro de la población. Siendo $1-\alpha$ el nivel de confianza.

En un I.C. 0,95 se estima que, de 100 intervalos obtenidos de 100 muestras aleatorias, 95 contengan al verdadero valor.

c) p-valor.

Se define como la prob. correspondiente al estadístico de ser posible bajo la hipótesis nula.
Es una medida de significación estadística.

5/4

NOTA